Exámenes de Selectividad

Matemáticas. Andalucía 2021, Extraordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Análisis

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{a(1-\cos(x))+b\sin(x)-2(e^x-1)}}{\mathbf{x^2}} = \mathbf{7}$**.**

Solución:

Para resolver este límite, primero notamos que al sustituir $x = 0$ en la expresión, obtenemos una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, ya que:

- Numerador: $a(1-\cos(0)) + b\sin(0) - 2(e^0 - 1) = a(1-1) + b(0) - 2(1-1) = a(0) + 0 - 2(0) = 0$.
- Denominador: $0^2 = 0$.

Debido a esta indeterminación, podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Esta regla establece que si $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ es de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, siempre que este último límite exista. Identificamos las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$$f(x) = a(1-\cos(x)) + b\sin(x) - 2(e^x - 1), \qquad g(x) = x^2.$$

Calculamos las primeras derivadas de $f(x)$ y $g(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[a(1-\cos(x)) + b\sin(x) - 2(e^x-1)\right] = a(\sin(x)) + b(\cos(x)) - 2(e^x) = a\sin(x) + b\cos(x) - 2e^x,$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^2\right] = 2x.$$

Ahora, consideramos el límite de la razón de las primeras derivadas:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{a\sin(x) + b\cos(x) - 2e^x}{2x}.$$

Sustituimos $x = 0$ en esta nueva expresión:

- Numerador: $a\sin(0) + b\cos(0) - 2e^0 = a(0) + b(1) - 2(1) = b - 2$.
- Denominador: $2(0) = 0$.

Para que el límite original exista (y sea igual a 7), el numerador de este nuevo límite debe ser igual a 0. Si $b - 2 \neq 0$, el límite sería $\pm\infty$. Por lo tanto, debemos tener:

$$b - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

Sustituyendo $b = 2$ en la expresión del límite de las primeras derivadas, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\sin(x) + 2\cos(x) - 2e^x}{2x}$$

Al sustituir $x = 0$, obtenemos nuevamente la forma indeterminada $\frac{0}{0}$:

- Numerador: $a\sin(0) + 2\cos(0) - 2e^0 = a(0) + 2(1) - 2(1) = 0$.
- Denominador: $2(0) = 0$.

Por lo tanto, podemos aplicar la regla de L'Hôpital una vez más. Calculamos las segundas derivadas de $f(x)$ y $g(x)$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[a\sin(x) + 2\cos(x) - 2e^x\right] = a\cos(x) - 2\sin(x) - 2e^x,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\left[2x\right] = 2.$$

Ahora, consideramos el límite de la razón de las segundas derivadas:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cos(x) - 2\sin(x) - 2e^x}{2} = \frac{a-2}{2}.$$

Sabemos que este límite debe ser igual a 7:

$$\frac{a-2}{2} = 7$$

Resolviendo para a:

$$a = 16.$$

Por lo tanto, los valores pedidos son:

$$\boxed{a = 16, \quad b = 2}$$

Ejercicio 2. Análisis

Halla $\mathbf{a > 0}$ y $\mathbf{b > 0}$ sabiendo que la gráfica de la función $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}}$ tiene en el punto $\mathbf{(1, 2)}$ un punto crítico.

Solución:

Para resolver este problema, utilizaremos la información proporcionada sobre la función y su punto crítico. Sabemos que el punto $(1, 2)$ pertenece a la gráfica de la función, lo que significa que $f(1) = 2$. También sabemos que en este punto hay un punto crítico, lo que implica que la derivada de la función en $x = 1$ es igual a cero, es decir, $f'(1) = 0$.

Como el punto $(1, 2)$ está en la gráfica de $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$, podemos sustituir $x = 1$:

$$f(1) = \frac{b(1)^2}{1 + a(1)^4} = \frac{b}{1 + a}.$$

Dado que $f(1) = 2$, tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{b}{1 + a} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 2 + 2a.$$

Un punto crítico ocurre donde la derivada de la función es cero o indefinida. Para la función dada, el denominador $1 + ax^4$ siempre es positivo ya que $a > 0$ y $x^4 \geq 0$, por lo que la derivada será cero cuando el numerador de la derivada sea cero. Calculamos la derivada de $f(x)$ utilizando la regla del cociente: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, donde $u(x) = bx^2$ y $v(x) = 1 + ax^4$. Primero, encontramos las derivadas de $u(x)$ y $v(x)$:

$$u'(x) = \frac{d}{dx}(bx^2) = 2bx,$$

$$v'(x) = \frac{d}{dx}(1 + ax^4) = 4ax^3.$$

Ahora, aplicamos la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(2bx)(1 + ax^4) - (bx^2)(4ax^3)}{(1 + ax^4)^2} = \frac{2bx + 2abx^5 - 4abx^5}{(1 + ax^4)^2} = \frac{2bx - 2abx^5}{(1 + ax^4)^2}.$$

Como $(1, 2)$ es un punto crítico, tenemos $f'(1) = 0$. Sustituimos $x = 1$ en la expresión de $f'(x)$:

$$f'(1) = \frac{2b(1) - 2ab(1)^5}{(1 + a(1)^4)^2} = \frac{2b - 2ab}{(1 + a)^2}.$$

Igualamos la derivada a cero:

$$\frac{2b - 2ab}{(1 + a)^2} = 0.$$

Para que una fracción sea cero, su numerador debe ser cero (y el denominador no debe ser cero). El denominador $(1 + a)^2$ es positivo ya que $a > 0$, así:

$$2b - 2ab = 0.$$

Factorizamos $2b$:

$$2b(1 - a) = 0.$$

Dado que se nos dice que $b > 0$, podemos dividir por $2b$:

$$1 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Ahora que hemos encontrado el valor de a, podemos sustituirlo en la ecuación que obtuvimos del primer paso:

$$b = 2 + 2a = 2 + 2(1) = 4.$$

Hemos encontrado que $a = 1$ y $b = 4$ y verificamos que cumplen las condiciones $a > 0$ y $b > 0$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{a = 1, \quad b = 4}$$

Ejercicio 3. Análisis

Considera la función $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{f(x) = 1 + \int_0^x te^t\, dt}.$$

Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución:

Para determinar los intervalos de concavidad y convexidad de la función f, necesitamos analizar el signo de su segunda derivada, $f''(x)$. Los puntos de inflexión ocurren donde la concavidad cambia, lo que sucede cuando $f''(x) = 0$ o no está definida y cambia de signo. Para encontrar la primera derivada de $f(x)$ utilizamos el Teorema Fundamental del Cálculo, que establece que si $F(x) = \int_a^x g(t)\, dt$, entonces $F'(x) = g(x)$. En nuestro caso, tenemos:

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t\, dt.$$

La primera derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 + \int_0^x te^t\, dt\right) = \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}\left(\int_0^x te^t\, dt\right) = 0 + xe^x = xe^x.$$

Para encontrar la segunda derivada de $f(x)$ derivamos $f'(x) = xe^x$ con respecto a x. Utilizamos la regla del producto: $(uv)' = u'v + uv'$, donde $u = x$ y $v = e^x$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = (1)(e^x) + (x)(e^x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x).$$

A continuación analizamos el signo de la segunda derivada. Vemos que la función e^x es siempre positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el signo de $f''(x)$ depende del signo del factor $(1 + x)$.

- Si $1 + x > 0$, es decir, $x > -1$, entonces $f''(x) > 0$. Esto significa que la función $f(x)$ es convexa en el intervalo $(-1, \infty)$.
- Si $1 + x < 0$, es decir, $x < -1$, entonces $f''(x) < 0$. Esto significa que la función $f(x)$ es cóncava en el intervalo $(-\infty, -1)$.
- Si $1 + x = 0$, es decir, $x = -1$, entonces $f''(x) = 0$. Este punto es un posible punto de inflexión.

Un punto de inflexión ocurre donde la concavidad de la función cambia. En este caso, la concavidad cambia en $x = -1$, ya que $f''(x)$ cambia de signo en este punto. Para encontrar el valor de la función en el punto de inflexión, necesitamos evaluar $f(-1)$. Primero, calculamos la integral $\int_0^x te^t\, dt$ utilizando integración por partes. Sean $u = t$ y $dv = e^t\, dt$y, entonces, $du = dt$ y $v = e^t$:

$$\int te^t\, dt = uv - \int v\, du = te^t - \int e^t\, dt = te^t - e^t + C.$$

Ahora, evaluamos la integral definida:

$$\int_0^x te^t\, dt = \left[te^t - e^t\right]_0^x = (xe^x - e^x) - (0 \cdot e^0 - e^0) = (xe^x - e^x) - (0 - 1) = xe^x - e^x + 1.$$

Sustituimos esto en la expresión de $f(x)$:

$$f(x) = 1 + (xe^x - e^x + 1) = xe^x - e^x + 2.$$

Ahora, evaluamos $f(-1)$:

$$f(-1) = (-1)e^{-1} - e^{-1} + 2 = -e^{-1} - e^{-1} + 2 = -2e^{-1} + 2 = 2 - \frac{2}{e}.$$

Entonces, el punto de inflexión tiene abscisa $x = -1$ y el valor que alcanza la función es $f(-1) = 2 - \frac{2}{e}$.

Por lo tanto, los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\boxed{\text{Concavidad: } (-\infty, -1),\ \text{Convexidad: } (-1, \infty),\ \text{Punto de inflexión: } (-1, 2 - \frac{2}{e})}$$

Ejercicio 4. Análisis

Considera la función f definida por $\mathbf{f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}}$ (para $\mathbf{x \neq -1, x \neq 1}$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\mathbf{(2,4)}$.

Solución:

Para hallar una primitiva de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, necesitamos integrar la función. Primero, simplificamos la expresión de $f(x)$ mediante división polinómica o manipulación algebraica. Por ejemplo, podemos escribir el numerador en términos del denominador:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)+2}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}.$$

Ahora, integramos la función simplificada:

$$\int f(x)\,dx = \int \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) dx = \int 1\,dx + \int \frac{2}{x^2-1}\,dx.$$

La primera integral es sencilla:

$$\int 1\,dx = x + C_1.$$

Para la segunda integral, utilizamos la descomposición en fracciones parciales de $\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$. Buscamos constantes A y B tales que:

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Multiplicando ambos lados por $(x-1)(x+1)$, obtenemos:

$$2 = A(x+1) + B(x-1) \quad \Rightarrow \quad 2 = Ax + A + Bx - B \quad \Rightarrow \quad 2 = (A+B)x + (A-B).$$

Igualando los coeficientes de los polinomios en ambos lados:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ A-B &= 2 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones, obtenemos:

$$2A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Sustituyendo $A = 1$ en la primera ecuación:

$$1 + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -1.$$

Entonces, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Ahora, podemos integrar:

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C_2 = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C_2.$$

Combinando los resultados, la primitiva general de $f(x)$ es:

$$F(x) = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C,$$

donde $C = C_1 + C_2$ es la constante de integración. Sabemos que la gráfica de la primitiva pasa por el punto $(2, 4)$, lo que significa que $F(2) = 4$. Sustituimos $x = 2$ en la expresión de $F(x)$:

$$F(2) = 2 + \ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right| + C = 2 + \ln\left|\frac{1}{3}\right| + C \quad \Rightarrow \quad 4 = 2 + \ln\left(\frac{1}{3}\right) + C.$$

Resolvemos para C:

$$4 = 2 + (\ln(1) - \ln(3)) + C \quad \Rightarrow \quad 4 = 2 + (0 - \ln(3)) + C \quad \Rightarrow \quad 4 = 2 - \ln(3) + C \quad \Rightarrow \quad C = 2 + \ln(3).$$

Sustituimos el valor de C en la expresión de la primitiva general:

$$F(x) = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2 + \ln(3).$$

Podemos combinar los términos logarítmicos utilizando la propiedad $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$:

$$F(x) = x + \ln\left(3\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + 2.$$

Por lo tanto, la primitiva de $\mathbf{f(x)}$ cuya gráfica pasa por el punto $(\mathbf{2}, \mathbf{4})$ es:

$$\boxed{F(x) = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2 + \ln(3)}$$

Ejercicio 5. Álgebra

Considera la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$**.**

a) **Comprueba que** $\mathbf{A^2} = -\mathbf{A^{-1}}$**.**

b) **Dadas las matrices**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

calcula la matriz X que verifica $\mathbf{A^4X} + \mathbf{B} = \mathbf{AC}$**.**

Solución:

a) **Comprueba que** $\mathbf{A^2} = -\mathbf{A^{-1}}$**.**

Para comprobar la relación $A^2 = -A^{-1}$, primero calculamos A^2 y A^{-1}. Empezamos obteniendo A^2:

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 4 \\ 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + (-5) \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + (-4) \cdot (-4) + (-5) \cdot 3 & 1 \cdot 4 + (-4) \cdot (-5) + (-5) \cdot 4 \\ -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & -1 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 + 3 - 4 & 0 - 12 + 12 & 0 - 15 + 16 \\ 0 - 4 + 5 & 3 + 16 - 15 & 4 + 20 - 20 \\ 0 + 3 - 4 & -3 - 12 + 12 & -4 - 15 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para calcular A^{-1}, primero computamos el determinante de A:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 0 - 3 \cdot (4 - 5) + 4 \cdot (3 - 4) = -3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) = 3 - 4 = -1. \end{aligned}$$

Como $\det(A) \neq 0$, la inversa existe. Calculamos la matriz adjunta de A. La matriz de cofactores es:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}((-4)(4) - (-5)(3)) & (-1)^{1+2}((1)(4) - (-5)(-1)) & (-1)^{1+3}((1)(3) - (-4)(-1)) \\ (-1)^{2+1}((3)(4) - (4)(3)) & (-1)^{2+2}((0)(4) - (4)(-1)) & (-1)^{2+3}((0)(3) - (3)(-1)) \\ (-1)^{3+1}((3)(-5) - (4)(-4)) & (-1)^{3+2}((0)(-5) - (4)(1)) & (-1)^{3+3}((0)(-4) - (3)(1)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-16 + 15) & -(4 - 5) & (3 - 4) \\ -(12 - 12) & (0 + 4) & -(0 + 3) \\ (-15 + 16) & -(0 - 4) & (0 - 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

La inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, calculamos $-A^{-1}$:

$$-A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Comparando A^2 y $-A^{-1}$, vemos que $A^2 = -A^{-1}$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = -A^{-1}}$$

b) Dadas las matrices

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

calcula la matriz X que verifica $\mathbf{A^4X + B = AC}$.

Queremos resolver la ecuación matricial $A^4X + B = AC$ para la matriz X. Calculamos AC:

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-3) + (-5) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9+4 & 6-4 \\ 2+12-5 & -8+5 \\ -2-9+4 & 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para calcular A^4, usaremos el resultado del apartado a), $A^2 = -A^{-1}$. Multiplicando por A a la izquierda, $A^3 = A(-A^{-1}) = -(AA^{-1}) = -I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$$A^3 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, calculamos $A^4 = A \cdot A^3 = A(-I) = -A$:

$$A^4 = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sustituimos $A^4 = -A$ en la ecuación $A^4X + B = AC$:

$$-AX + B = AC \quad \Rightarrow \quad -AX = AC - B \quad \Rightarrow \quad AX = B - AC.$$

Calculamos $B - AC$:

$$B - AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-5) & -1-2 \\ 3-9 & 0-(-3) \\ -4-(-7) & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tenemos la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Multiplicamos por A^{-1} a la izquierda:

$$A^{-1}AX = A^{-1}(B - AC) \quad \Rightarrow \quad IX = A^{-1}(B - AC) \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}(B - AC).$$

Sustituyendo:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 6 + 0\cdot(-6) + (-1)\cdot 3 & 1\cdot(-3) + 0\cdot 3 + (-1)\cdot 3 \\ -1\cdot 6 + (-4)\cdot(-6) + (-4)\cdot 3 & -1\cdot(-3) + (-4)\cdot 3 + (-4)\cdot 3 \\ 1\cdot 6 + 3\cdot(-6) + 3\cdot 3 & 1\cdot(-3) + 3\cdot 3 + 3\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6+0-3 & -3+0-3 \\ -6+24-12 & 3-12-12 \\ 6-18+9 & -3+9+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz X que verifica la ecuación es:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6. Álgebra

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) **Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta.**
b) **Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?**

Solución:

a) **Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta.**

Sean x, y y z el número de viajes semanales por las rutas A, B y C, respectivamente. Del enunciado original, tenemos las siguientes ecuaciones:

- El número total de viajes es 70:
$$x + y + z = 70.$$
- El número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C:
$$y = x + z.$$

Para este apartado, se nos da una condición adicional: el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70. Esto se puede escribir como:

$$2(x + z) = 70.$$

De esta ecuación, podemos deducir que:

$$x + z = \frac{70}{2} = 35.$$

Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación, obtenemos el número de viajes por la ruta B:

$$y = x + z = 35.$$

Ahora, sustituimos el valor de y en la primera ecuación :

$$x + 35 + z = 70 \quad \Rightarrow \quad x + z = 70 - 35 = 35.$$

Esta ecuación es la misma que obtuvimos de la condición adicional del apartado. Tenemos una ecuación con dos incógnitas, $x+z = 35$. Esta ecuación tiene múltiples soluciones posibles para x y z (por ejemplo, si $x = 10$, entonces $z = 25$; si $x = 0$, entonces $z = 35$, etc.), siempre que $x \geq 0$ y $z \geq 0$.

Por lo tanto, no podemos deducir el número de viajes por cada ruta de forma única, ya que tenemos una ecuación con dos incógnitas (x y z). Solo podemos determinar que el número de viajes por la ruta B es 35 y que la suma de los viajes por las rutas A y C es 35.

$$\boxed{\text{No se puede deducir el número de viajes por cada ruta de forma única}}$$

b) **Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?**

Mantenemos las dos ecuaciones originales:

– El número total de viajes es 70:

$$x + y + z = 70.$$

– El número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C:

$$y = x + z.$$

Para este apartado, se nos da una condición adicional diferente: el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5. Esto se puede escribir como:

$$2z = y - 5.$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas (x, y, z). Podemos resolver este sistema mediante sustitución. Sustituimos la segunda ecuación en la primera ecuación:

$$x + (x + z) + z = 70 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2z = 70 \quad \Rightarrow \quad x + z = 35.$$

Ahora, sustituimos la segunda ecuación en la ecuación de la condición adicional de este apartado:

$$2z = (x + z) - 5 \quad \Rightarrow \quad 2z = x + z - 5 \quad \Rightarrow \quad z = x - 5.$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (x y z):

$$\begin{cases} x + z & = 35 \\ z & = x - 5 \end{cases}$$

Sustituimos $z = x - 5$ en la ecuación $x + z = 35$:

$$x + (x - 5) = 35 \quad \Rightarrow \quad 2x - 5 = 35 \quad \Rightarrow \quad 2x = 35 + 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{40}{2} = 20.$$

Ahora que tenemos el valor de x, podemos encontrar el valor de z:

$$z = x - 5 = 20 - 5 = 15.$$

Finalmente, encontramos el valor de y:

$$y = x + z = 20 + 15 = 35.$$

Por lo tanto, el número de viajes por cada ruta es:

$$\boxed{\text{Ruta A: } x = 20, \text{ Ruta B: } y = 35, \text{ Ruta C: } z = 15}$$

Ejercicio 7. Geometría

La recta perpendicular desde el punto A$(1, 1, 0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto B$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

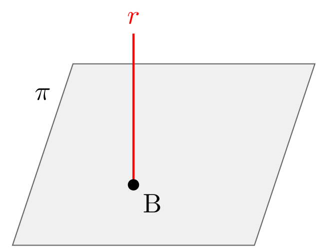
a) Calcula la ecuación del plano π.
b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π.

Solución:

a) Calcula la ecuación del plano π.

La recta que pasa por A y es perpendicular al plano π contiene el punto B, que es el punto de intersección con el plano. Esto significa que el vector $\vec{AB}$ es normal al plano π. Calculamos el vector $\vec{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(1 - 1, \frac{1}{2} - 1, \frac{1}{2} - 0\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



Podemos tomar como vector normal del plano π cualquier vector paralelo a $\overrightarrow{AB}$. Un vector paralelo más sencillo es $\vec{n} = -2\vec{AB} = (0, 1, -1)$. La ecuación de un plano con vector normal $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) es $n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$. En este caso, el vector normal es $(0, 1, -1)$ y el punto del plano es $B\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Sustituyendo estos valores, obtenemos la ecuación del plano π:

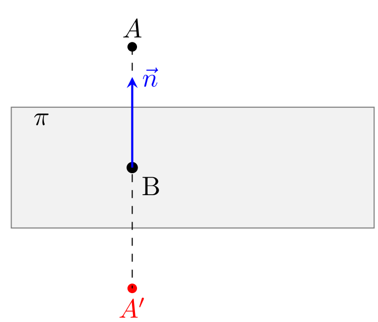
$$0(x - 1) + 1\left(y - \frac{1}{2}\right) + (-1)\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y - \frac{1}{2} - z + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv y - z = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación del plano es:

$$\boxed{\pi \equiv y - z = 0}$$

b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π.

Sea A' el punto simétrico de A respecto al plano π. El punto B es el punto medio del segmento AA', ya que la recta que une A y A' es perpendicular al plano π y B es el punto de intersección.



La distancia entre A y su simétrico A' es el doble de la distancia entre A y el plano π, que es la distancia entre A y B. Calculamos la distancia entre los puntos $A(1,1,0)$ y $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos en el espacio:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La distancia entre el punto A y su simétrico A' es $2\cdot d(A,B)$:

$$d(A,A')=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, la distancia del punto A a su simétrico respecto a π es:

$$\boxed{\sqrt{2}}$$

Ejercicio 8. Geometría

Considera las rectas

$$\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \qquad \mathbf{s} \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) **Estudia la posición relativa de r y s.**
b) **Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s.**

Solución:

a) **Estudia la posición relativa de r y s.**

La recta r pasa por el punto $P_r = (3, 1, -3)$ y tiene vector director $\vec{v}_r = (1, 0, -1)$. La recta s está definida por las ecuaciones implícitas $x + y = 1$ y $z = 0$. Para obtener su forma paramétrica, hacemos $x = \mu$. Entonces $y = 1 - x = 1 - \mu$, y $z = 0$. Por lo tanto, la recta s pasa por el punto $P_s = (0, 1, 0)$ (para $\mu = 0$) y tiene vector director $\vec{v}_s = (1, -1, 0)$.

Primero, comprobamos si los vectores directores son paralelos. Los vectores $\vec{v}_r = (1, 0, -1)$ y $\vec{v}_s = (1, -1, 0)$ no son proporcionales, ya que no existe un escalar k tal que $(1, 0, -1) = k(1, -1, 0)$. Por lo tanto, las rectas r y s no son paralelas.

A continuación, comprobamos si las rectas se cortan. Para ello, igualamos las coordenadas de un punto genérico de r con un punto genérico de s:

$$\begin{aligned} 3 + \lambda &= \mu \\ 1 &= 1 - \mu \\ -3 - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

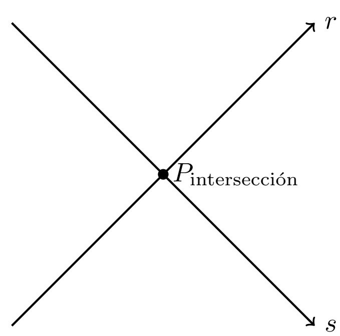
De la tercera ecuación, obtenemos $\lambda = -3$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación:

$$3 + (-3) = \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = 0.$$

Comprobamos la segunda ecuación:

$$1 = 1 - 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1.$$

Las tres ecuaciones son consistentes, por lo que las rectas r y s se cortan. El punto de intersección se obtiene sustituyendo $\lambda = -3$ en las ecuaciones de r (o $\mu = 0$ en las ecuaciones de s):
- Para r: $x = 3 - 3 = 0$, $y = 1$, $z = -3 - (-3) = 0$. Punto $(0, 1, 0)$.
- Para s: $x = 0$, $y = 1 - 0 = 1$, $z = 0$. Punto $(0, 1, 0)$.



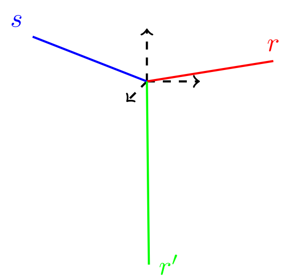
Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ son secantes en el punto } (0,1,0)}$$

b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

Dado que las rectas r y s se cortan en el punto $P = (0,1,0)$, la recta que corta perpendicularmente a ambas debe pasar por este punto y tener un vector director perpendicular a los vectores directores de r y s. El vector director de esta recta será el producto vectorial de $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$:

$$\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0\cdot 0 - (-1)(-1))\vec{i} - (1\cdot 0 - (-1)(1))\vec{j} + (1\cdot(-1) - 0\cdot 1)\vec{k} = (-1,-1,-1).$$



Podemos tomar como vector director de la recta buscada el vector $\vec{d} = (1,1,1)$, que es paralelo a $\vec{w}$. La recta que pasa por el punto $P(0,1,0)$ y tiene vector director $\vec{d} = (1,1,1)$ tiene las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$r' \equiv \begin{cases} x = 0 + t = t \\ y = 1 + t \\ z = 0 + t = t \end{cases}$$

Por lo tanto, la recta que corta perpendicularmente a r y a s es:

$$\boxed{r' \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}}$$